

第2节 垂直关系证明思路大全 (★★☆)

内容提要

本节主要归纳立体几何大题第一问常见的证明垂直关系的思路，先梳理需要用到的一些定理。

1. 线面垂直的判定定理：如图1，若 $l \perp a$ ， $l \perp b$ ， $a, b \subset \alpha$ ， $a \cap b = P$ ，则 $l \perp \alpha$ 。

2. 面面垂直的判定定理：如图2，若 $a \perp \beta$ ， $a \subset \alpha$ ，则 $\alpha \perp \beta$ 。

3. 面面垂直的性质定理：如图3，若 $\alpha \perp \beta$ ， $\alpha \cap \beta = AB$ ， $a \subset \alpha$ 且 $a \perp AB$ ，则 $a \perp \beta$ 。

4. 三垂线定理：如图4， $a \subset \alpha$ ， l 在 α 内的射影是 b ，若 $a \perp b$ ，则 $a \perp l$ ，此结论反过来也成立。

①作用：如图4，想证明 l 垂直于面 α 内的 a ，只需证 l 在面 α 内的射影与 a 垂直，这就将异面垂直问题转化为了共面垂直问题。注意，三垂线定理在大题中要给出证明过程，再使用。

②定理的证明过程：因为 $\begin{cases} c \perp \alpha \\ a \subset \alpha \end{cases}$ ，所以 $a \perp c$ ，故 $a \perp b \Leftrightarrow a \perp$ 图中的三角形所在平面 $\Leftrightarrow a \perp l$ 。

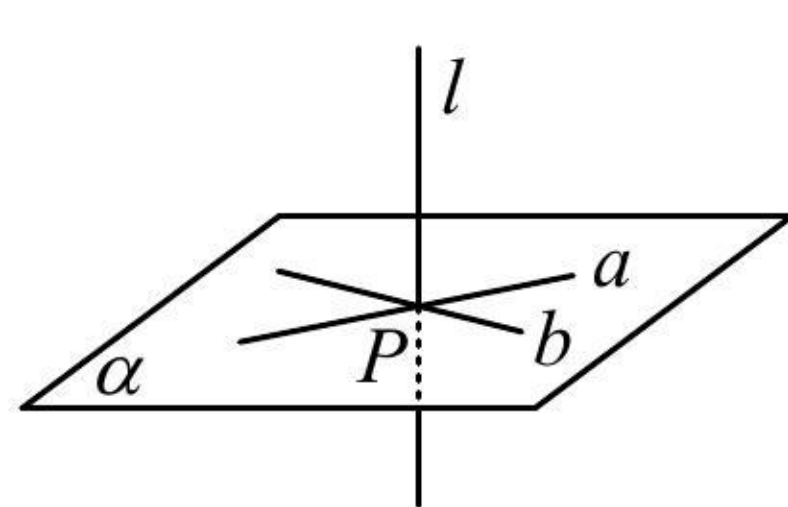


图1

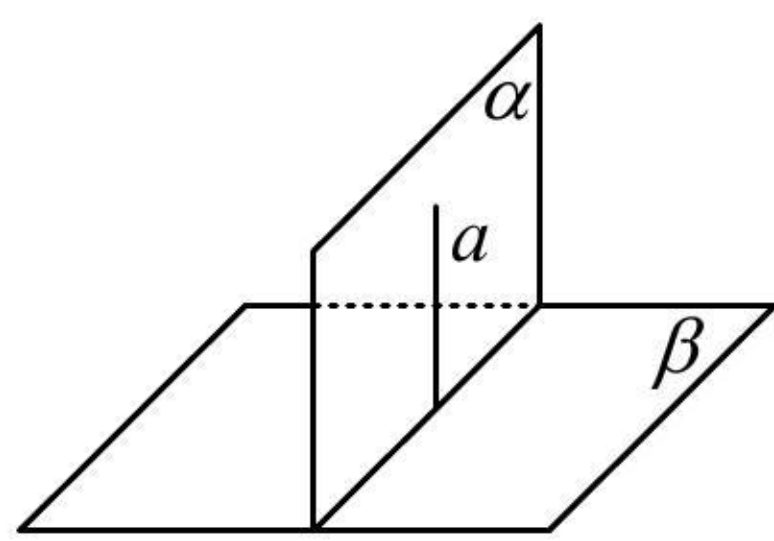


图2

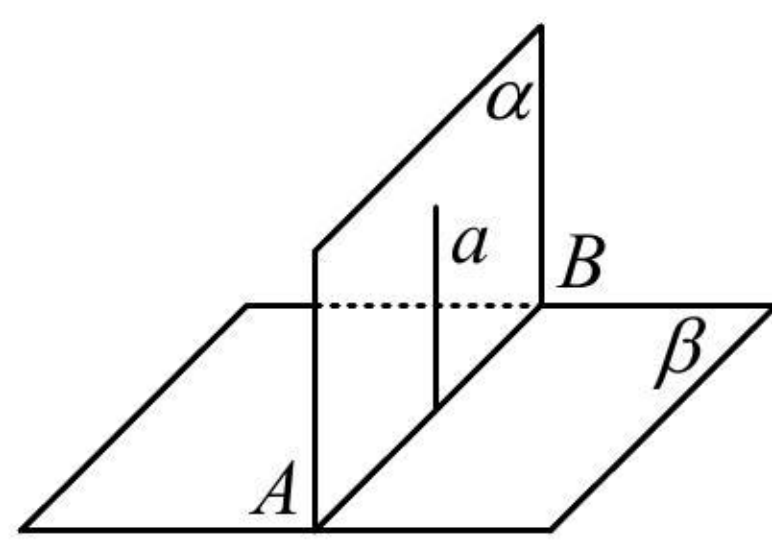


图3

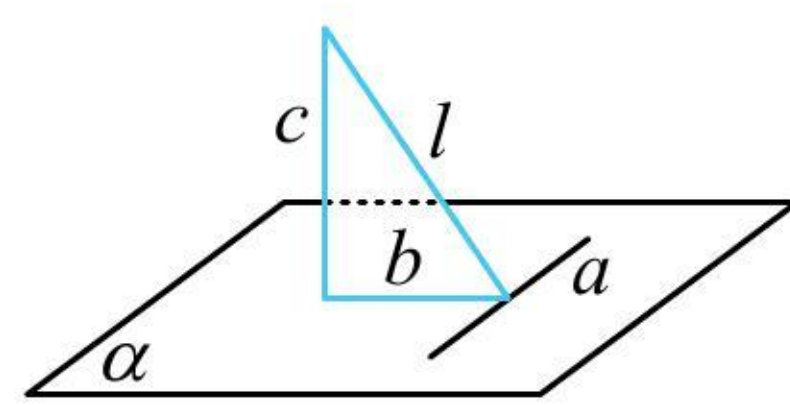


图4

空间中证明垂直关系的常见思路：

1. 证线面垂直：证明直线垂直于平面内的两条相交直线即可。

2. 证线线垂直：若线与线是共面的，则考虑用平面几何的方法来证；若异面，如图5，要证异面直线 l 和 a 垂直，可证明 l 垂直于 a 所在的某个平面 α ，找到 α 是解决问题的关键，常用两种方法来找：

①逆推法：把我们要证的结论与给出的某垂直条件结合，看能得出什么样的线面垂直，这样我们就找到了面 α ，再来分析怎么证 $l \perp \alpha$ ，问题就回到前面1的证线面垂直了。

②三垂线定理法：如图6，若 l 在平面 β 内， a 在 β 内的射影 b 很好找，由三垂线定理， $l \perp b \Leftrightarrow l \perp a$ ，所以 a 和射影 b 构成的平面（图中三角形所在平面）即为我们要找的 α 。

3. 证面面垂直：核心是证线面垂直，若不会找线，可通过在其中一个面内找与交线垂直的直线，如上面图3中的 a ，找到这条直线，问题就回到前面1的证线面垂直了。

4. 已知面面垂直：常过一个面内的点作交线的垂线，得到线面垂直，再得到我们需要的线线垂直。

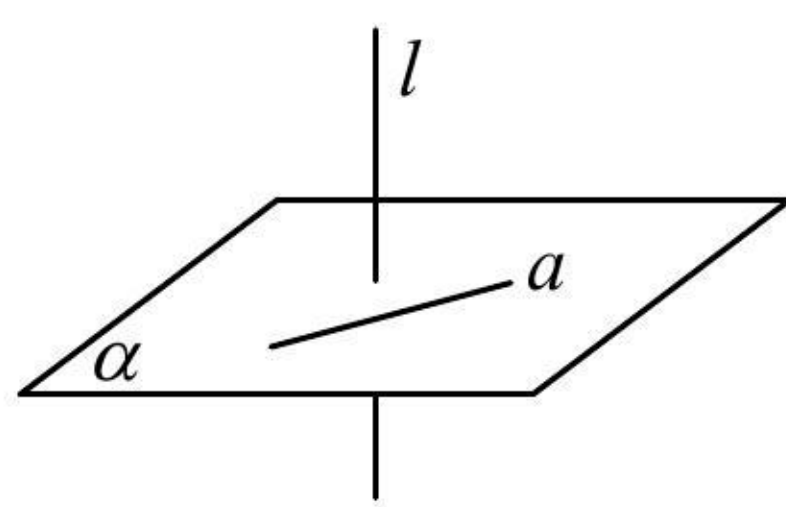


图5

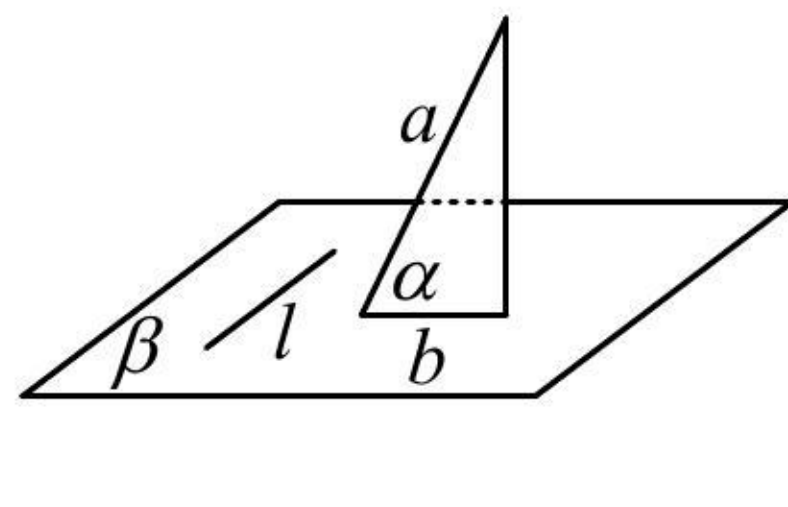


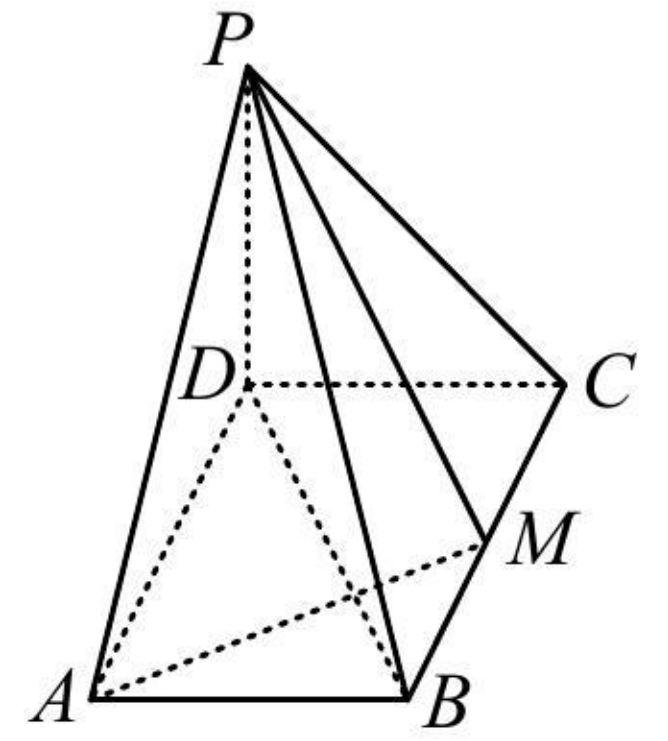
图6

提醒：本节题目只节选了原题中的1个小问，所给条件可能有多余。

典型例题

类型 I：线面垂直的逆推思路

【例 1】如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形， $PD=CD=1$ ， $PC=BC=\sqrt{2}$ ， M 为 BC 上的点，且 $AM \perp$ 平面 PBD ，证明： $PD \perp$ 平面 $ABCD$ 。



证明：（要证结论，只需证 $PD \perp$ 面 $ABCD$ 内的两条相交直线，条件中有线面垂直，故其中一条选 AM ）

因为 $AM \perp$ 平面 PBD ， $PD \subset$ 平面 PBD ，所以 $AM \perp PD$ ①，

（另一条选谁呢？剩余条件都是长度，用长度证垂直，想到勾股定理， $\triangle PCD$ 就满足勾股定理）

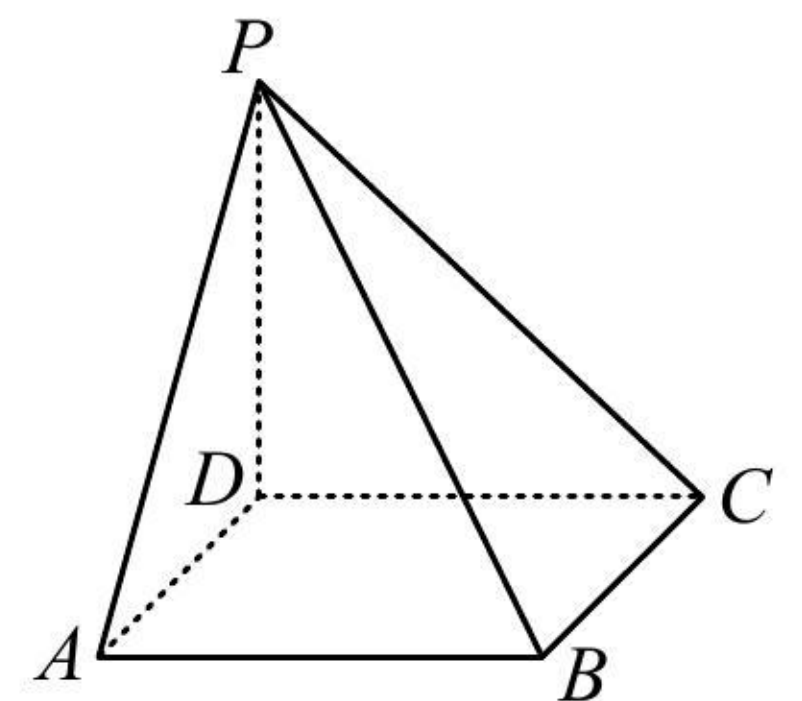
因为 $PD=CD=1$ ， $PC=\sqrt{2}$ ，所以 $PD^2+CD^2=2=PC^2$ ，故 $PD \perp CD$ ②，

因为 $AM, CD \subset$ 平面 $ABCD$ ， AM 与 CD 是相交直线，结合①②可得 $PD \perp$ 平面 $ABCD$ 。

【反思】证线面垂直的核心是找线，这个线一定（隐藏）在条件里，尝试翻译即可。

【变式】（2020·新高考 I 卷节选）如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为正方形， $PD \perp$ 底面 $ABCD$ ，设平面 PAD 与平面 PBC 的交线为 l ，证明： $l \perp$ 平面 PDC 。

《一数·高考数学核心方法》



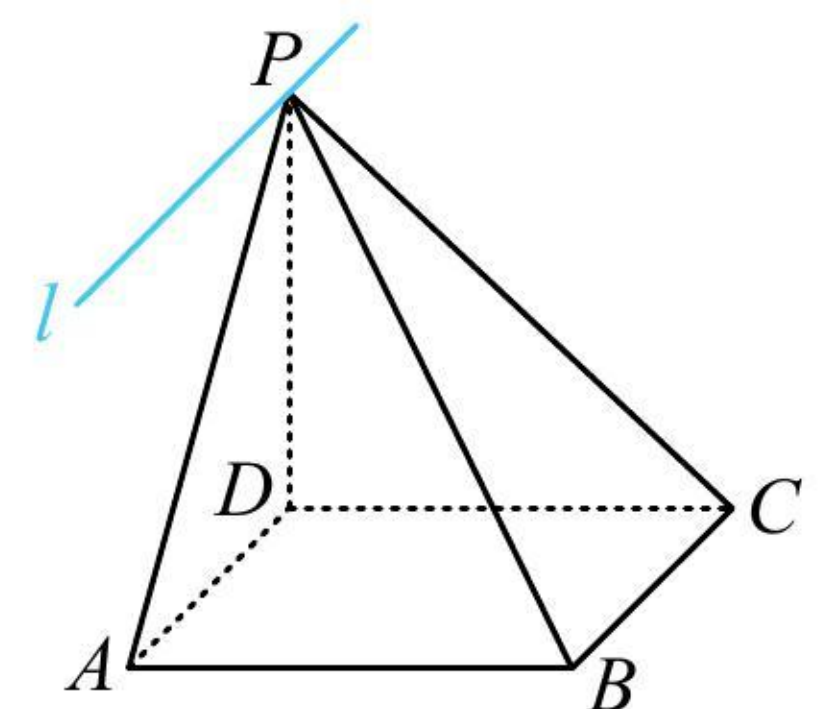
证明：（图中没给交线 l ，需先把它画出来，注意到 $BC \parallel AD$ ，故画交线可用线面平行的性质定理）

由 $ABCD$ 是正方形知 $BC \parallel AD$ ，又 $BC \not\subset$ 平面 PAD ， $AD \subset$ 平面 PAD ，所以 $BC \parallel$ 平面 PAD ，而 $BC \subset$ 平面 PBC ，平面 $PBC \cap$ 平面 $PAD = l$ ，所以 $BC \parallel l$ ，如图，

（在面 PDC 内直接找两条与 l 垂直的直线不易，故考虑用 $BC \parallel l$ 来转化为证 $BC \perp$ 平面 PDC ）

因为 $PD \perp$ 底面 $ABCD$ ， $BC \subset$ 底面 $ABCD$ ，所以 $BC \perp PD$ ，又 $BC \perp CD$ ，

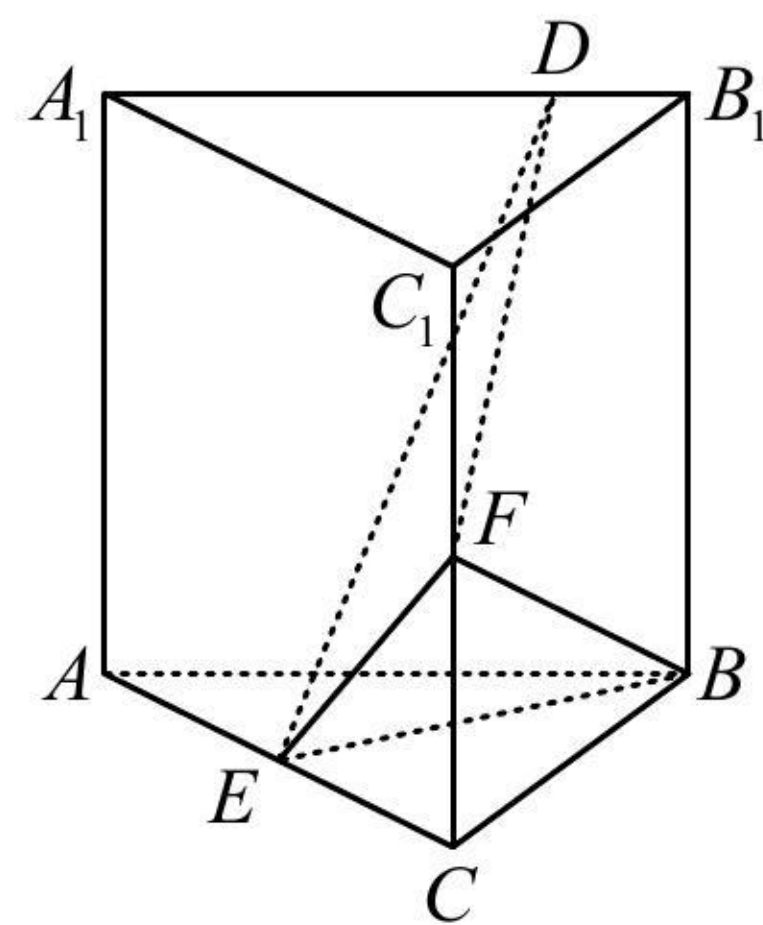
且 $PD, CD \subset$ 平面 PCD ， $PD \cap CD = D$ ，所以 $BC \perp$ 平面 PCD ，结合 $BC \parallel l$ 可得 $l \perp$ 平面 PCD 。



【反思】若发现直线 l 与平面 α 内的直线的垂直条件少，则可考虑转化为证 l 的某平行线与 α 垂直。

类型 II：线线垂直的逆推思路

【例 2】(2021·全国甲卷节选) 已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 侧面 AA_1B_1B 为正方形, $AB=BC=2$, E, F 分别为 AC 和 CC_1 的中点, D 为棱 A_1B_1 上的点, $BF \perp A_1B_1$, 证明: $BF \perp DE$.



证明: (有两个切入点, 我们都给出来, 切入点 1: 要证 $BF \perp DE$, 考虑证明 $BF \perp DE$ 所在的某平面, 要找到这个平面, 尝试逆推法, 假设 $BF \perp DE$ 了, 结合条件中还有 $BF \perp A_1B_1$, 于是 BF 应 $\perp A_1B_1$ 和 DE 构成的平面, 此面可扩展为下图中的面 B_1DEG , 故考虑证 $BF \perp$ 面 B_1DEG ; 切入点 2: 证异面垂直也可用三垂线定理来思考, 观察发现 BF 在右侧面内, 而 DE 在右侧面的投影容易找到, 过 E 作右侧面的垂线即得到投影 B_1G , 故只需证 $BF \perp$ 平面 B_1DEG)

如图, 取 BC 中点 G , 连接 EG, B_1G , 因为 E 为 AC 中点, 所以 $EG \parallel AB$,

又 $AB \parallel B_1D$, 所以 $EG \parallel B_1D$, 故 B_1, D, E, G 四点共面, (下面证 $BF \perp B_1G$, 可在面 BCC_1B_1 中考虑)

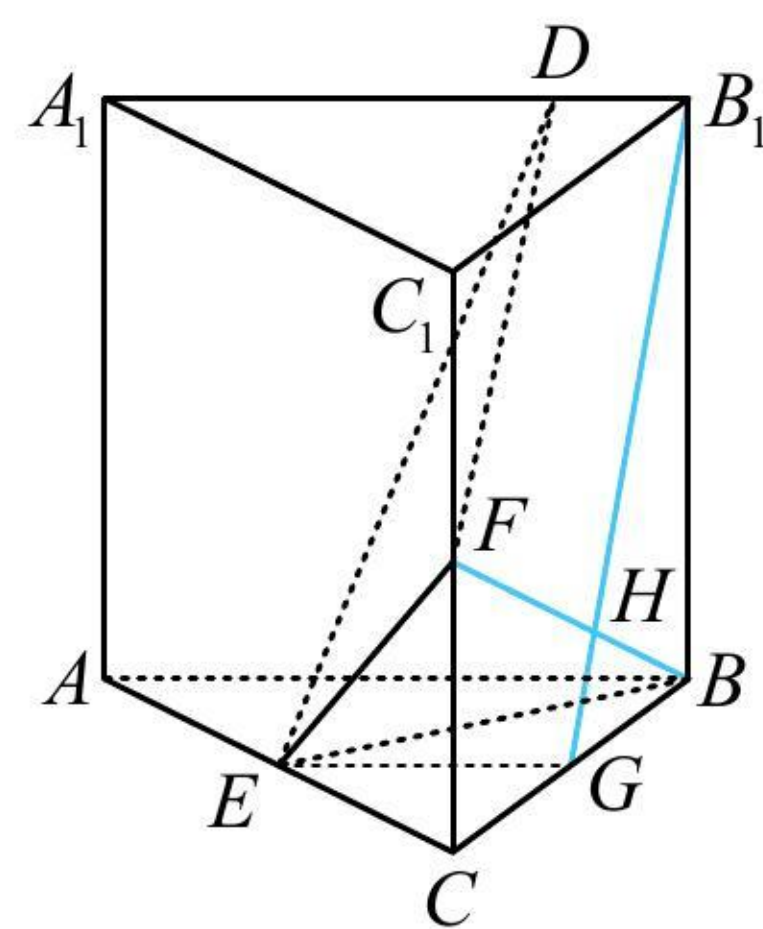
由题意, $CF=1, BC=2$, 所以 $\tan \angle CBF = \frac{CF}{BC} = \frac{1}{2}$, 又 $BG=1, BB_1=AB=2$, 所以 $\tan \angle BB_1G = \frac{BG}{BB_1} = \frac{1}{2}$,

所以 $\tan \angle CBF = \tan \angle BB_1G$, 故 $\angle CBF = \angle BB_1G$, 因为 $\angle BB_1G + \angle BGB_1 = 90^\circ$, 所以 $\angle CBF + \angle BGB_1 = 90^\circ$,

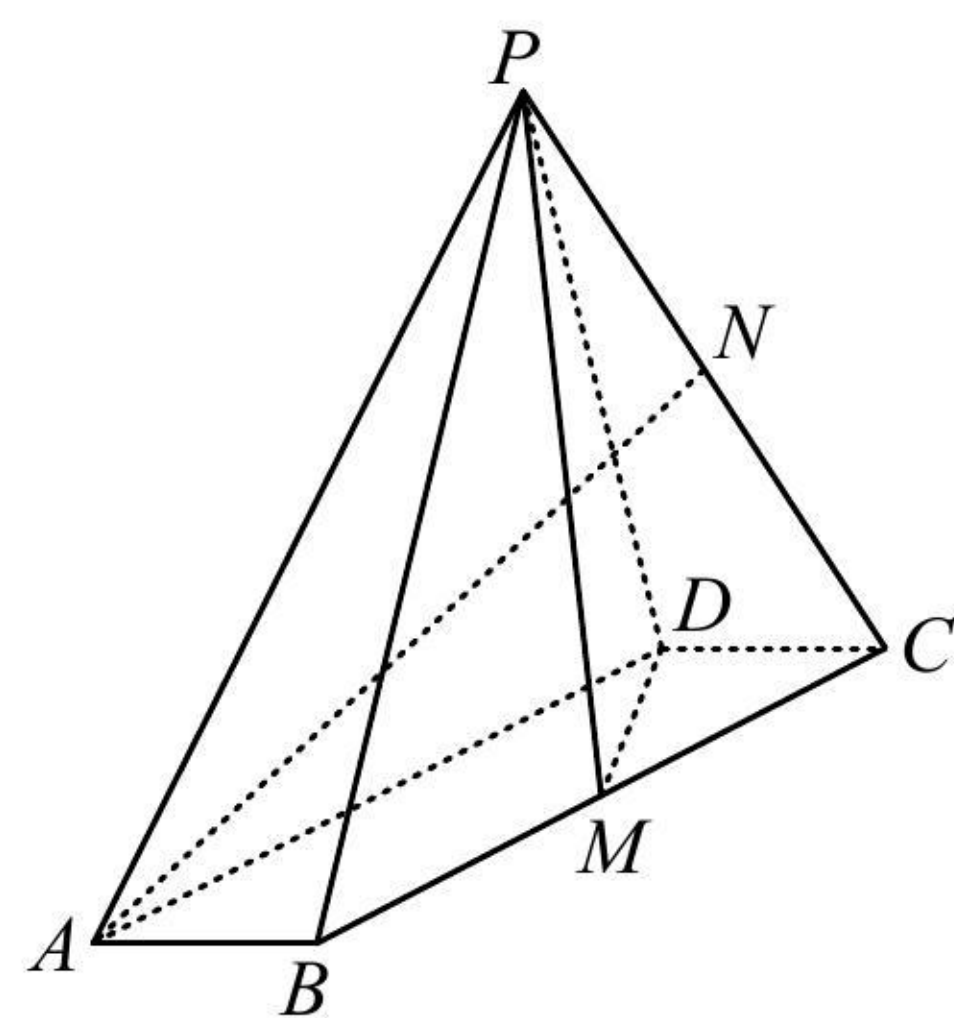
设 $B_1G \cap BF = H$, 则 $\angle GHB = 90^\circ$, 所以 $BF \perp B_1G$, 由题意, $BF \perp A_1B_1$, 所以 $BF \perp B_1D$,

因为 $B_1D, B_1G \subset$ 平面 $B_1DEG, B_1D \cap B_1G = B_1$, 所以 $BF \perp$ 平面 B_1DEG ,

因为 $DE \subset$ 平面 B_1DEG , 所以 $BF \perp DE$.



【变式 1】(2021·浙江卷节选) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是平行四边形, $\angle ABC = 120^\circ$, $AB=1, BC=4, PA=\sqrt{15}$, M, N 分别是 BC, PC 的中点, $PD \perp DC, PM \perp MD$, 证明: $AB \perp PM$.



证明: (本题 PM 在底面的投影不好找, 故不用三垂线定理找思路, 尝试逆推, 有两条路径: ①假设 $AB \perp PM$ 成立, 结合条件 $PM \perp MD$ 可得 $PM \perp$ 面 $ABCD$, 故可通过证这一线面垂直来证 $AB \perp PM$; ②假设 $AB \perp PM$ 成立, 结合条件 $PD \perp DC$ (即 $PD \perp AB$) 可得 $AB \perp$ 面 PDM , 故可通过证这一线面垂直来证明 $AB \perp PM$. 对比发现 $AB \perp$ 面 PDM 更好证, 可转化为证 $DC \perp$ 面 PDM , 只需在 $\triangle CDM$ 中证 $DC \perp DM$)

因为 $ABCD$ 是平行四边形, $\angle ABC = 120^\circ$, 所以 $\angle MCD = 60^\circ$, $CD = AB = 1$,

又 $BC = 4$, M 为 BC 中点, 所以 $CM = 2$, 在 $\triangle CDM$ 中, 由余弦定理,

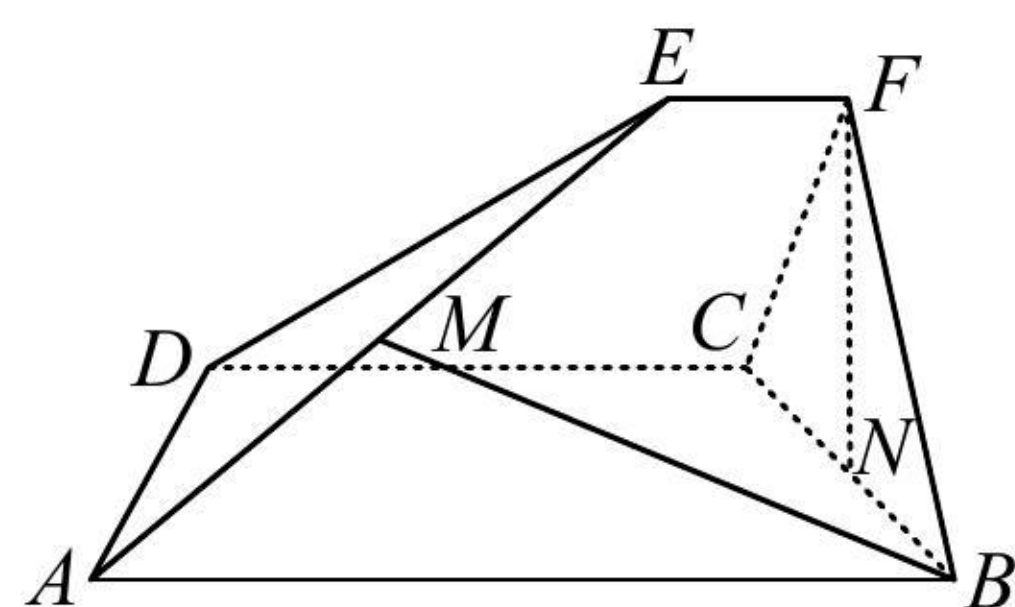
$DM^2 = CD^2 + CM^2 - 2CD \cdot CM \cdot \cos \angle MCD = 3$, 从而 $DM^2 + CD^2 = 4 = CM^2$, 故 $DC \perp DM$,

又 $PD \perp DC$, 且 $PD, DM \subset$ 平面 PDM , $PD \cap DM = D$, 所以 $DC \perp$ 平面 PDM ,

因为 $AB \parallel DC$, 所以 $AB \perp$ 平面 PDM , 又 $PM \subset$ 平面 PDM , 所以 $AB \perp PM$.

【反思】 用逆推法寻找上一步的线面垂直, 若遇到多种可能性, 则可通过对比, 选择一条简单可行的路径.

【变式 2】 (2022 · 浙江卷节选) 如图, 已知 $ABCD$ 和 $CDEF$ 都是直角梯形, $AB \parallel DC$, $DC \parallel EF$, $AB = 5$, $DC = 3$, $EF = 1$, $\angle BAD = \angle CDE = 60^\circ$, 二面角 $F - DC - B$ 的平面角为 60° , 设 M, N 分别为 AE, BC 的中点, 证明: $FN \perp AD$.



证明: (逆推发现题目没有垂直条件, 找不到面, 怎么办? 其实题目的数据隐藏着 $\triangle CFB$ 为等边三角形, 于是 $FN \perp BC$, 故若假设 $FN \perp AD$, 则 $FN \perp$ 面 $ABCD$, 这样面就找到了)

因为 $ABCD$ 和 $CDEF$ 都是直角梯形, $AB \parallel DC$, $DC \parallel EF$, $\angle BAD = \angle CDE = 60^\circ$,

所以 $\angle FCD = \angle BCD = 90^\circ$, 故 $\begin{cases} CD \perp CF \\ CD \perp CB \end{cases}$ ①,

所以 $\angle FCB$ 是二面角 $F - DC - B$ 的平面角, 由题意, $\angle FCB = 60^\circ$,

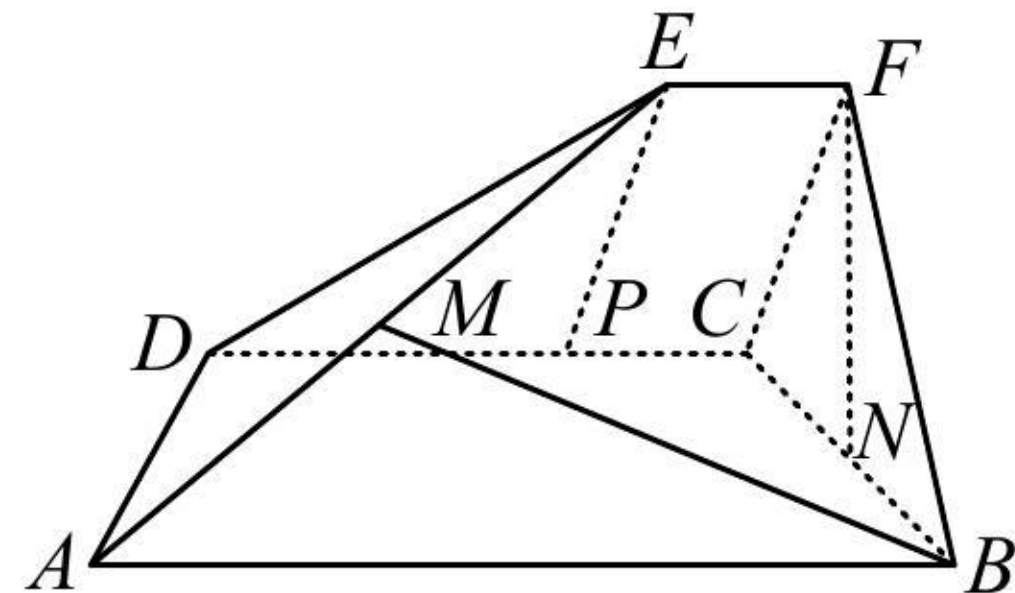
如图, 作 $EP \perp CD$ 于 P , 则 $PC = EF = 1$, $PD = DC - PC = 2$, $PE = PD \cdot \tan \angle EDP = 2\sqrt{3}$, 所以 $CF = 2\sqrt{3}$,

同理, 在直角梯形 $ABCD$ 中可求得 $BC = 2\sqrt{3}$, 所以 $BC = CF$, 故 $\triangle BCF$ 是正三角形,

又 N 为 BC 的中点, 所以 $FN \perp BC$ ②,

由①结合 $CF, CB \subset$ 平面 BCF , $CF \cap CB = C$ 可得 $CD \perp$ 平面 BCF ,

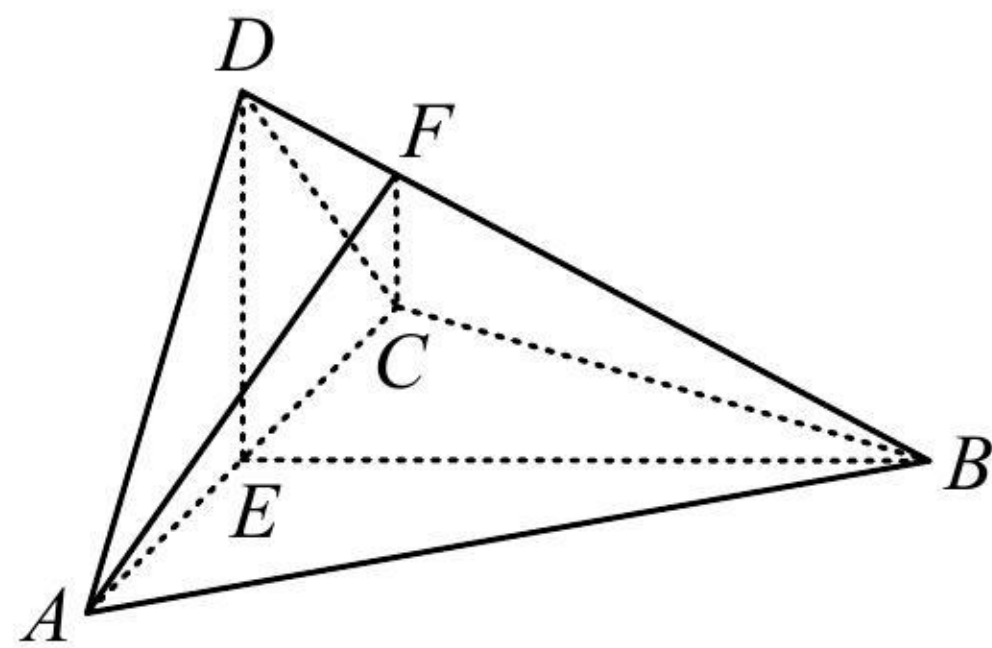
因为 $FN \subset$ 平面 BCF ，所以 $FN \perp CD$ ，
 结合②以及 $BC, CD \subset$ 平面 $ABCD$ ， $BC \cap CD = C$ 可得 $FN \perp$ 平面 $ABCD$ ，
 又 $AD \subset$ 平面 $ABCD$ ，所以 $FN \perp AD$ 。



【总结】 ①三垂线定理是证异面直线垂直的好方法，但当投影不易找时会失效；②逆推法是通法，但有时题干没有其它线线垂直，不易直接逆推线面垂直，此时往往题目数据隐藏着垂直条件，需要仔细挖掘。

类型III：面面垂直判定的逆推思路

【例 3】 (2022 · 全国乙卷节选) 如图，四面体 $ABCD$ 中， $AD \perp CD$ ， $AD = CD$ ， $\angle ADB = \angle BDC$ ， E 为 AC 中点，证明：平面 $BED \perp$ 平面 ACD 。



证明： (要证面面垂直，先找线面垂直，观察图形发现不外乎证 $BE \perp$ 面 ACD ，或证 $AC \perp$ 面 BED ，若选 $BE \perp$ 面 ACD ，则由所给条件只能证出 $BE \perp AC$ ，不够，故选 $AC \perp$ 面 BED)

因为 $AD = CD$ ， E 为 AC 中点，所以 $AC \perp DE$ ①，

又 $\angle ADB = \angle BDC$ ， $AD = CD$ ， $BD = BD$ ，所以 $\triangle ADB \cong \triangle CDB$ ，从而 $AB = BC$ ，故 $AC \perp BE$ ②，

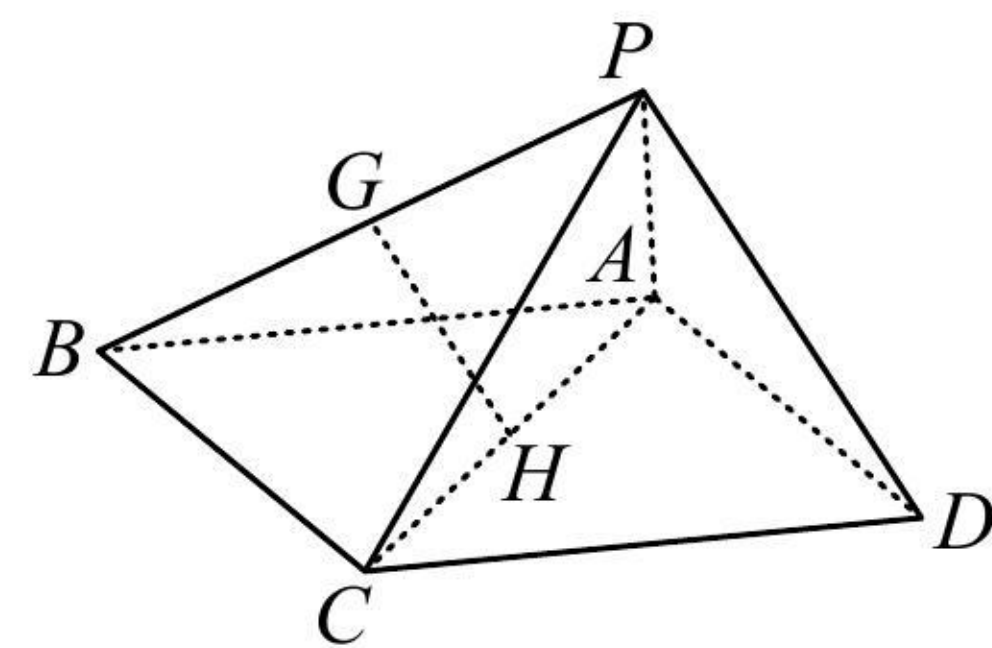
由①②结合 DE, BE 是平面 BED 内的相交直线可得 $AC \perp$ 平面 BED ，

又 $AC \subset$ 平面 ACD ，所以平面 $BED \perp$ 平面 ACD 。

【总结】 从类型 I 到类型 III，我们发现最终都回归到线面垂直上，只要掌握了逆推思路这一通法，学会结合条件分析，即可无往不胜。

类型IV：已知面面垂直的常用辅助线作法

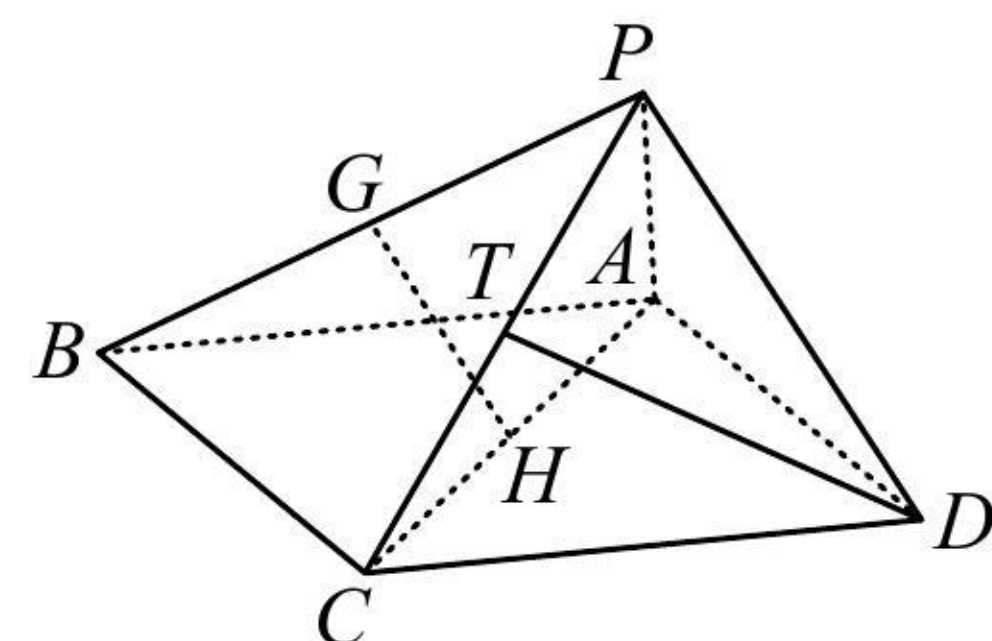
【例 4】 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为平行四边形， $\triangle PCD$ 为等边三角形，平面 $PAC \perp$ 平面 PCD ， $PA \perp CD$ ， $CD = 2$ ， $AD = 3$ ，证明： $PA \perp$ 平面 PCD 。



证明： (要证线面垂直，需在面内找两条相交直线与 PA 垂直，只给了 $PA \perp CD$ ，另一条怎么找？看到面面

垂直的条件，想到过 A 或 D 作两个面交线 PC 的垂线，思路就有了)

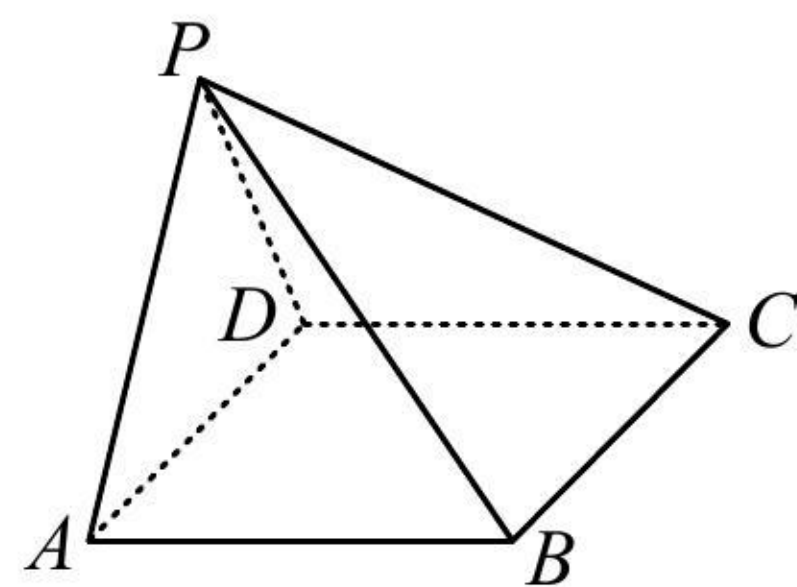
如图，取 PC 中点 T ，连接 DT ，因为 $\triangle PCD$ 为等边三角形，所以 $DT \perp PC$ ，
 又平面 $PAC \perp$ 平面 PCD ，平面 $PAC \cap$ 平面 $PCD = PC$ ， $DT \subset$ 平面 PCD ，所以 $DT \perp$ 平面 PAC ，
 因为 $PA \subset$ 平面 PAC ，所以 $PA \perp DT$ ，
 又 $PA \perp CD$ ，且 DT, CD 是平面 PCD 内的相交直线，所以 $PA \perp$ 平面 PCD 。



【总结】 若题目出现面面垂直条件，则过某面内顶点作交线的垂线，寻找想要的线面垂直，是常见的思路。

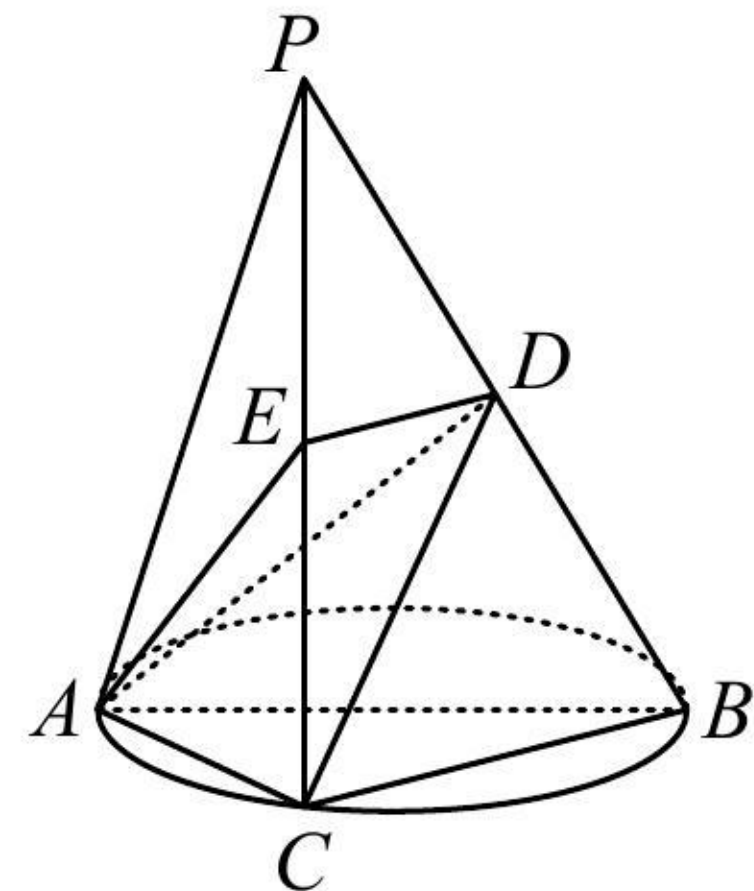
强化训练

1. (2023·上海模拟·★★) 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ，且 $\angle BAP = \angle CDP = 90^\circ$ ，证明：平面 $PAB \perp$ 平面 PAD 。

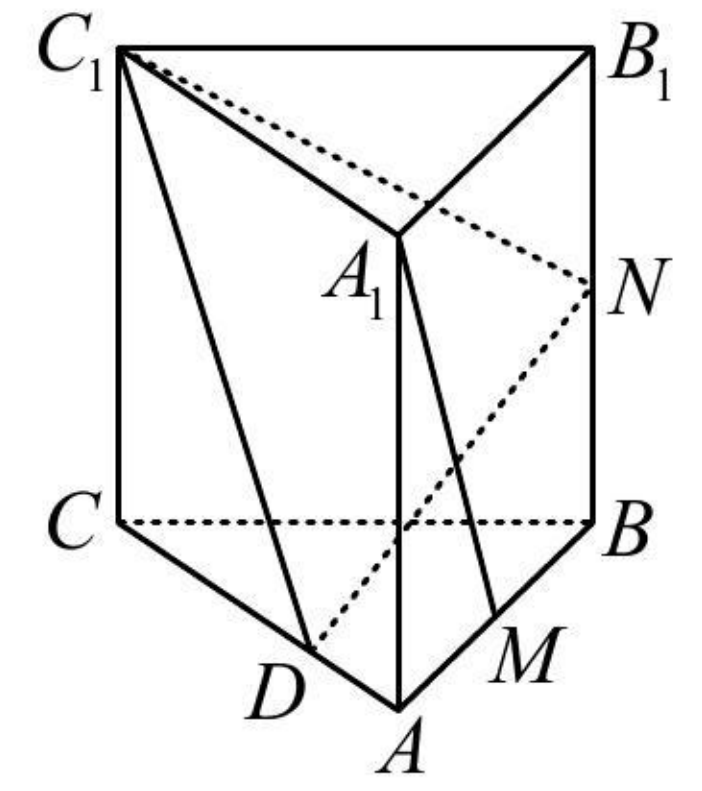


《一数·高考数学核心方法》

2. (2023·四川成都模拟·★★) 如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中， AB 是 $\triangle ABC$ 的外接圆直径， PC 垂直于圆所在的平面， D, E 分别是棱 PB, PC 的中点，证明： $DE \perp$ 平面 PAC 。

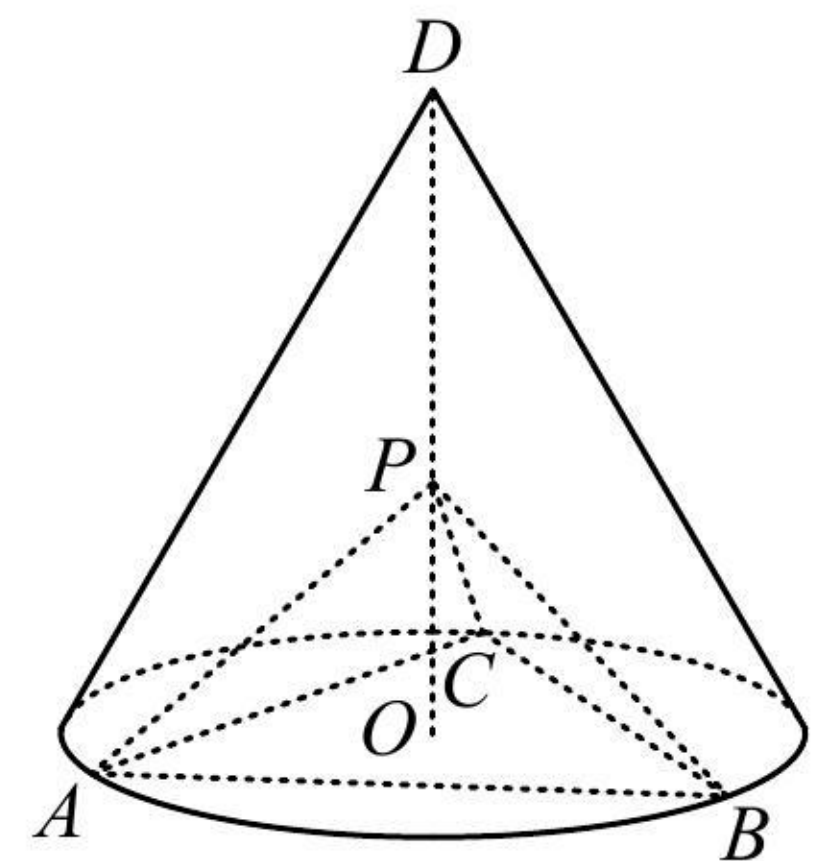


3. (2022·云南昆明模拟·★★) 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 侧面 ACC_1A_1 为正方形, $\angle CAB=90^\circ$, $AC=AB=2$, M, N 分别为 AB 和 BB_1 的中点, D 为棱 AC 上的点, 证明: $A_1M \perp DN$.

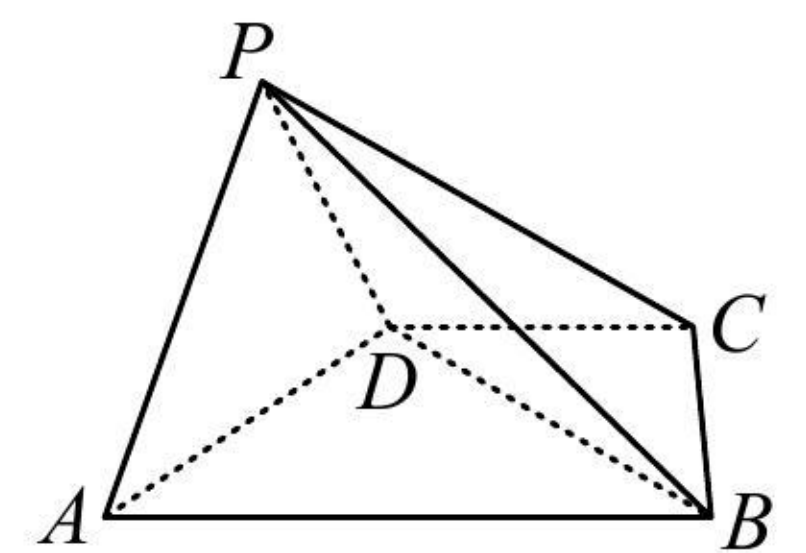


4. (2020·新课标 I 卷·★★) 如图, D 为圆锥的顶点, O 是圆锥底面的圆心, $\triangle ABC$ 是底面的内接正三角形, P 为 DO 上一点, $\angle APC=90^\circ$, 证明: 平面 $PAB \perp$ 平面 PAC .

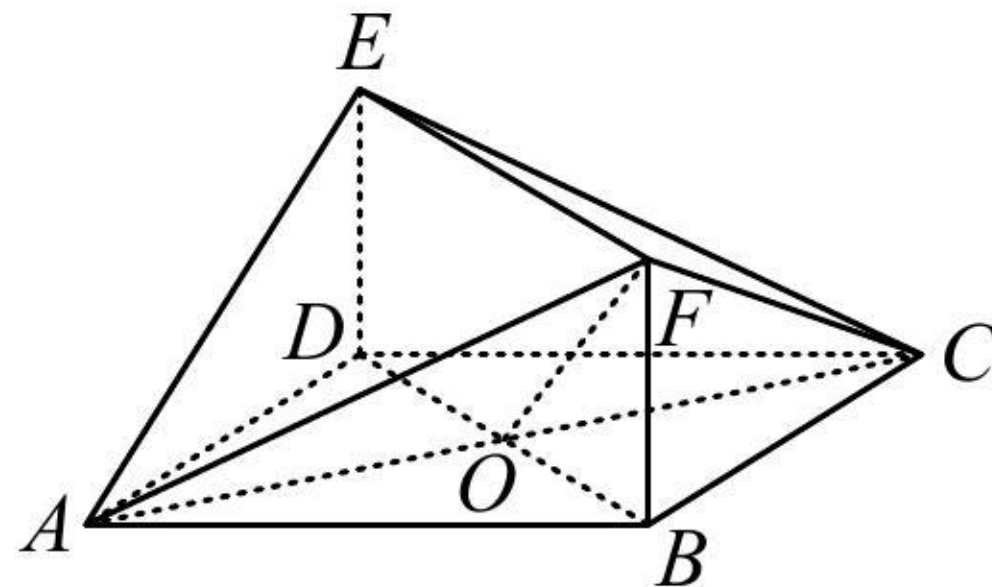
《一数·高考数学核心方法》



5. (2023·陕西榆林一模·★★) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, $AB \parallel CD$, $\angle DAB=60^\circ$, $PA \perp PD$, 且 $PA=PD=\sqrt{2}$, $AB=2CD=2$, 证明: $AD \perp PB$.



6. (2023 · 吉林模拟 · ★★★★★) 如图, 在多面体 $ABCDEF$ 中, 四边形 $ABCD$ 为菱形, 且 $\angle DAB = 60^\circ$, 四边形 $BDEF$ 为矩形, $BD = 2BF = 2$, AC 与 BD 交于点 O , $FA = FC$, 证明: $DE \perp$ 平面 $ABCD$.



7. (2023 · 浙江杭州模拟 · ★★★★★) 如图, 四边形 $ABCD$ 为正方形, $PD \perp$ 平面 $ABCD$, $AQ \parallel PD$, $PD = 2QA = 2AB$, 证明: $PQ \perp$ 平面 DCQ .

